

MODÉLISATION DE LA DISTRIBUTION GRANULOMÉTRIQUE DES GOUTTES DE PLUIE PAR LA LOI GAMMA GÉNÉRALISÉE

Kougbeagbede Hilaire ¹, Moumouni Sounmaïla ², Adjikpe Loïc S. ¹, Adechinan Joseph A. ³,
Houngninou Etienne B. ¹

¹Laboratoire de Physique de l'Atmosphère, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

²Ecole Normale Supérieure de Natitingou, Université Nationale des Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques, Bénin

³Faculté des Sciences et Techniques de Natitingou, Université Nationale des Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques, Bénin

Correspondant : hilaire.kougbeagbede@fast.uac.bj

INFOS SUR L'ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le : 24 novembre 2020

Reçu en format révisé le 09 avril 2021

Accepté le : 16 avril 2021

Mots-Clés : DSD, pluie, Gamma généralisée, microphysique, AMMA

Keywords : DSD, Rainfall, generalized gamma, microphysics, AMMA

RESUME

La distribution granulométrique de la taille des gouttes de pluie joue un rôle crucial dans l'étude de la microphysique des précipitations, l'érosion des sols et la télécommunication. Elle est souvent modélisée par les lois exponentielle, lognormale, gamma standard ou gamma généralisé. Jusqu'à présent en Afrique de l'ouest, la distribution granulométrique de la taille des gouttes de pluie est modélisée par la loi gamma ou lognormale. La présente étude s'est intéressée à la modélisation de la distribution par la loi gamma généralisée normalisée par un double moment. Les données exploitées sont les spectres de gouttes de pluie de durée une minute de la ligne de grain du 25/07/2006. Elles ont été recueillies au cours de la campagne AMMA à Djougou (Nord-Ouest du Bénin) en 2006. Les résultats obtenus montrent que la loi gamma généralisée normalisée par un double moment estime mieux les moments que la loi gamma standard normalisée par un double moment proposé par Moumouni et al., 2008.

I. INTRODUCTION

La distribution volumique des gouttes de pluie ou granulométrie de la pluie encore appelée Drop size distribution (DSD) en anglais est le nombre de gouttes de pluie par diamètre et par unité de volume d'air. Elle est mesurée au sol et revêt un caractère très capital pour les études scientifiques telles que l'estimation quantitative des précipitations par radar météorologique, par les liens de télécommunication ou par satellite. Elle permet aussi d'étudier l'érosion des sols (Angulo-Martinez and Barros, 2015 ; Nanko et al., 2016 ; Rosewell, 1986), favorise une étude plus approfondie de la microphysique des nuages (Rosenfeld and Ulbrich, 2003) et constitue une entrée importante des modèles météorologique. Ces différentes études sont faites à l'aide des lois statistiques ajustant au mieux la distribution des gouttes. Ainsi la loi exponentielle a été proposée par Marshall and Palmer, 1948 et ensuite généralisée par Sekhon and Srivastava, 1971 et Waldvogel, 1974 pour reproduire les DSD. Mais, à cause de l'insuffisance de cette loi qui a tendance à surestimer le nombre de gouttes de pluies, les lois gamma et lognormale ont été introduites respectivement

par Ulbrich, 1983 ; Markowitz, 1976 suivi de Ajayi and Olsen, 1985 puis de Feingold and Levin, 1986.

En Afrique de l'Ouest, pendant que Sauvageot and Lacaux, 1995 ; Nzeukou et al., 2004 et Ochou et al., 2007 utilisaient la loi lognormale pour décrire la distribution granulométrique de la taille des gouttes de pluie, Moumouni et al., 2008 avaient montré que les DSD mesurées au Bénin sont mieux représentées par la loi gamma standard normalisée par un double moment. Récemment, Lee et al., 2004 ont introduit la loi gamma généralisée normalisée par deux moments à partir de la proposition de Testud et al., 2001. Selon les résultats obtenus, cette loi représente mieux les DSD quelle que soit leur forme ou leur nature (Raupach and Berne, 2017; thurai and Bringi, 2018)

Cette étude a pour but d'évaluer la capacité de la gamma généralisée normalisée par un double moments à modéliser les DSD mesurées au Bénin au cours de l'événement pluvieux du 25/07/2006.

II. DONNEES ET METHODE

2.1. Description des données

En zone soudanienne près de 50 % des systèmes précipitants sont des lignes de grain bien organisées (Depraetre et al., 2008 ; Omostosh, 1985). La donnée de DSD utilisée dans cette étude est une ligne de grain qui a été recueillie au cours de la campagne AMMA (Redelsperger et al., 2006) le 25 juillet 2007 à Djougou (1.66°E, 9.69°N) au Nord du Bénin à l'aide d'un spectro-pluviomètre optique (disdromètre) à un seul faisceau de section 100cm². Les spectres de cet évènement ont été classifiés en spectre convectif ou stratiforme suivant la méthode de Testud et al., 2001, basée sur l'intensité de pluie. Ainsi, l'évènement comporte au total 187 spectres dont 34 convectifs et 153 stratiformes. Les autres caractéristiques de l'évènement sont bien détaillées dans Moumouni et al., 2008.

2.2. Méthode de modélisation

La normalisation de la distribution des gouttes de pluie (DSD) était initialement utilisée aux fins d'une représentation compacte des DSD. Elle est devenue un outil permettant d'étudier la variabilité des DSD de manière systématique. Sempere Torres et al., 1994 ont proposé une approche de normalisation basée sur le formalisme d'échelle et une paramétrisation par un moment unique choisi arbitrairement. Cette approche consiste à définir une loi pour chaque type de pluie (Sempere Torres et al., 1999 ; 2000). C'est la même approche proposée par Testud et al 2001 mais avec une paramétrisation à deux moments sans hypothèse sur les types de pluie. Cette approche de Testud et al., 2001 utilise les moments d'ordre trois et quatre. Les techniques de Testud et al., 2001 et Sempere Torres et al., 1994 ont été unifiées par Lee et al., 2004, qui ont proposé une mise à l'échelle généralisée à double moments de normalisation qui ne nécessite aucune hypothèse sur la forme fonctionnelle des DSD normalisées et utilise des ordres de moment arbitraires. Cette technique proposée par Lee et al., 2004 basée sur la loi gamma généralisée (GG) s'est avérée similaire pour différents types de précipitations. Elle est plus efficace pour capturer la variabilité des précipitations en fournissant une représentation pratique et compacte de la DSD. Ce modèle GG est plus flexible et représente mieux les DSD que le modèle gamma standard (Uijlenhoet and stricker, 1999; Auf der Maur 2001 ; Lee et al 2004 ; Thurai 2018).

Selon Auf der Maur, 2001, la distribution des gouttes de pluie représentée par N(D) peut être exprimée par :

$$N(D) = M_0 \frac{c\lambda}{\Gamma(\mu_{GG})} (\lambda D)^{c\mu_{GG}-1} \exp[-(\lambda D)^c] \quad (1)$$

où M_0 représente le nombre total de goutte par unité de volume ; c et μ_{GG} les paramètres de forme de la loi gamma généralisé et D le diamètre équivalent des

gouttes. M_0 et λ peuvent être exprimés en fonction de deux moments de référence M_i et M_j où i et j peuvent varier entre zéro et six sous la condition $i \neq j$; ce qui conduit à la normalisation avec deux moments (Lee et al., 2004). La forme normalisée du gamma généralisé se présente sous la forme suivante :

$$N(D) = N_0^* h_{GG}(i, j, \mu_{GG}, c)(x) \quad (2)$$

avec :

$$N_0^* = M_i^{(j+1)/(j-i)} M_j^{(i+1)/(i-j)}$$

et

$$h_{GG} = c \Gamma_i^{\frac{(j+c\mu_{GG})}{(i-j)}} \Gamma_j^{\frac{(-i-c\mu_{GG})}{(i-j)}} x^{c\mu_{GG}-1} \exp\left[-\left(\frac{\Gamma_i}{\Gamma_j}\right)^{c/(i-j)} x^c\right]$$

$$\Gamma_i = \Gamma\left(\mu_{GG} + \frac{i}{c}\right); \Gamma_j = \Gamma\left(\mu_{GG} + \frac{j}{c}\right) \text{ et } x = \frac{D}{D_m'}$$

$$D_m' = (M_j/M_i)^{1/(j-i)}$$

En posant $i=3$ et $j=4$, on constate que D_m' représente le diamètre massique moyen. On peut, par ailleurs, déduire les lois gamma standard et exponentielle à partir de l'expression (2). Pour la loi gamma standard, il suffit de poser $\mu_{SG} = \mu_{GG} - 1$ et $c=1$. Par contre, pour obtenir la loi exponentielle, on posera $\mu_{GG} = 1$ et $c=1$.

Bien que plusieurs couples de moments peuvent être utilisés pour normaliser la loi gamma généralisée (Lee et al., 2004), nous proposons ici les moments d'ordre 3 et 4. Ces derniers ressortent les caractéristiques physiques des précipitations et présentent une stabilité remarquable de la forme des DSD normalisées (Testud et al., 2001). Pour estimer les paramètres μ_{GG} et c , la méthode des moindres carrés est utilisée. Elle consiste à minimiser la somme de la différence au carré entre $\log(N(D)/N_0^*)$ et $\log(h_{GG}(x))$ sur le spectre pour éliminer l'effet des petites gouttes souvent en grand nombre (Lee et al., 2004). Deux tests sont également implémentés pour vérifier la capacité de la loi GG à restituer les moments des DSD mesurées. Il s'agit du coefficient NS de Nash et Sutcliffe, 1970 et la formule d'erreur SDFE (Lee et al., 2004) dont les expressions se présentent comme suit :

$$SDFE = \left[\frac{1}{k} \sum^k \left(\frac{M_n - M_{n,est}}{M_n} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$NS = 1 - \frac{\sum^k (M_n - M_{n,est})^2}{\sum^k (M_n - \bar{M}_n)^2} \quad (4)$$

où k désigne le nombre total de spectres ; M_n et $M_{n,est}$ sont les moments d'ordre n respectivement des spectres mesurés et estimés.

III. RESULTATS ET ANALYSE

3.1. Modélisation de la distribution par la loi gamma généralisée

La figure 1 montre la représentation de $N(D)/N_0^*$ en fonction de $x=D/D_m'$ d'un spectre convectif d'une part et

d'un autre stratiforme d'autre part sur lesquels est ajustée la fonction h_{GG} . On constate que le spectre soit stratiforme ou convectif, la fonction h_{GG} ajuste bien la distribution $N(D)/N_0^*$ en fonction de $x=D/D_m$. La loi GG obtenue par spectre a été utilisée pour estimer les moments d'ordre 1 à 6. On constate que les moments estimés correspondent presque aux moments réels avec tout au plus 5% d'erreur (tableau 2) pour les moments d'ordre inférieurs ou égal à 5 et 14% pour le moment d'ordre 6 quelle que soit la nature du spectre. Quant au coefficient de Nash (NS), il varie entre 0,84 et 1 quelle que soit la nature du spectre (tableau 1). Ces résultats sont semblables à ceux obtenus par Thurai and Bringi, 2018 aux USA lors de l'étude de la capacité de loi GG à bien ajuster les DSD quelle que soit leur forme.

Le paramètre μ_{GG} varie entre 0,12 et 18,7 pendant que c oscille entre 0,4 et 13 pour l'ensemble des spectres. Leur histogramme montre que μ_{GG} est bimodale et que près de 60% des valeurs de μ_{GG} sont comprises entre 0,12 et 5 et moins de 20% des spectres disposent d'une valeur de μ_{GG} supérieur à 15.

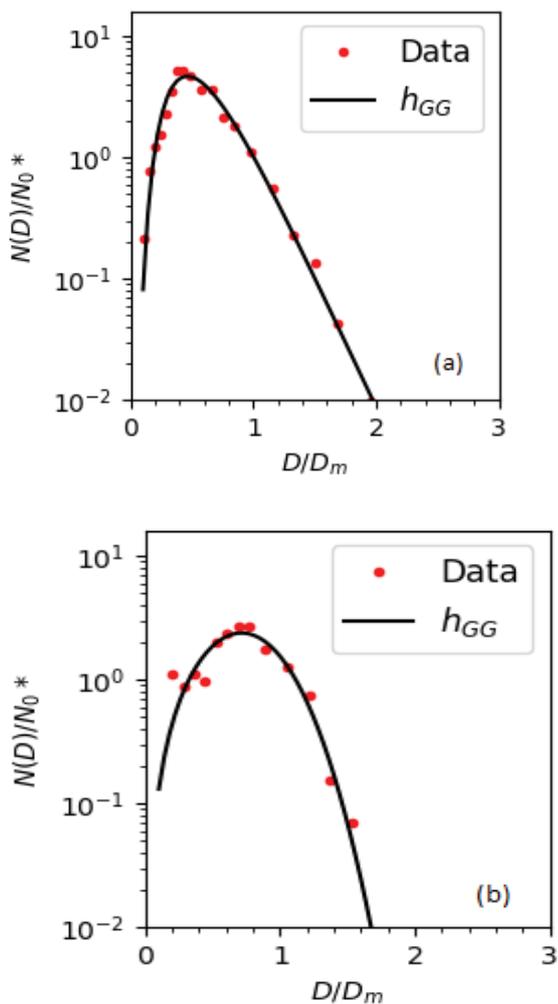


Figure 1 : Ajustement de h_{GG} sur (a) un spectre convectif, (b) un spectre stratiforme.

Par contre l'histogramme de c est unimodal près de 95 % de ses valeurs sont entre 0,4 et 5.

Table 1. Coefficient de Nash

Ordre des moments	Convectif	Stratiforme	Tous les spectres
0	0,991	0,975	0,997
1	0,994	0,991	0,998
2	0,999	0,998	0,999
3	0,999	0,999	0,999
4	0,999	0,999	0,999
5	0,998	0,976	0,999
6	0,986	0,847	0,991

Table 2. Coefficient SDFE

Ordre des moments	Convectif	Stratiforme	Tous les spectres
0	0,054	0,058	0,057
1	0,044	0,039	0,040
2	0,022	0,01	0,020
3	0,003	0,003	0,003
4	0,006	0,004	0,004
5	0,04	0,036	0,038
6	0,140	0,111	0,118

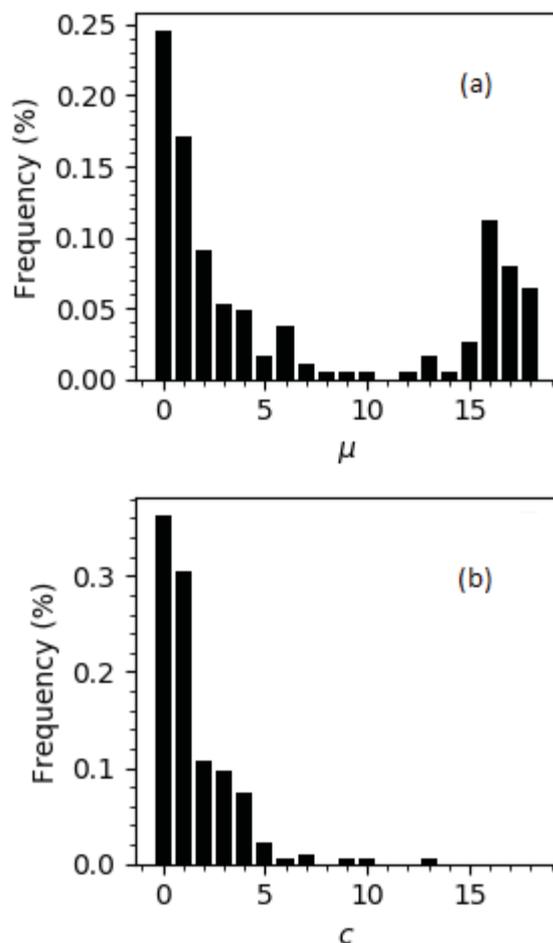


Figure 2 : Histogrammes des paramètres μ_{GG} (a) et c (b) de la fonction h_{GG} pour l'ensemble des spectres de l'évènement

3.2. Efficacité de GG par rapport à gamma standard

Pour évaluer l'efficacité de la loi gamma généralisée normalisée (GG) par un double moments (ordres 3 et 4) développée par rapport à la loi gamma standard (SG)

normalisée par deux moments (ordres 3 et 4) proposée par Testud et al., 2001 et exploitée par Moumouni et al., 2008, nous avons comparé les résultats des tests des critères statistiques Nash et SDFE. Les résultats sont présentés dans le tableau 3. Les valeurs des critères dans le tableau montrent que les deux lois ajustent les DSD dans les mêmes ordres. Cependant, SG commet plus d'erreurs que GG quel que soit l'ordre des moments estimés sur l'ensemble des données. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus jusqu'à présent (Lee et al., 2004 ; Thurai and Bringi, 2018).

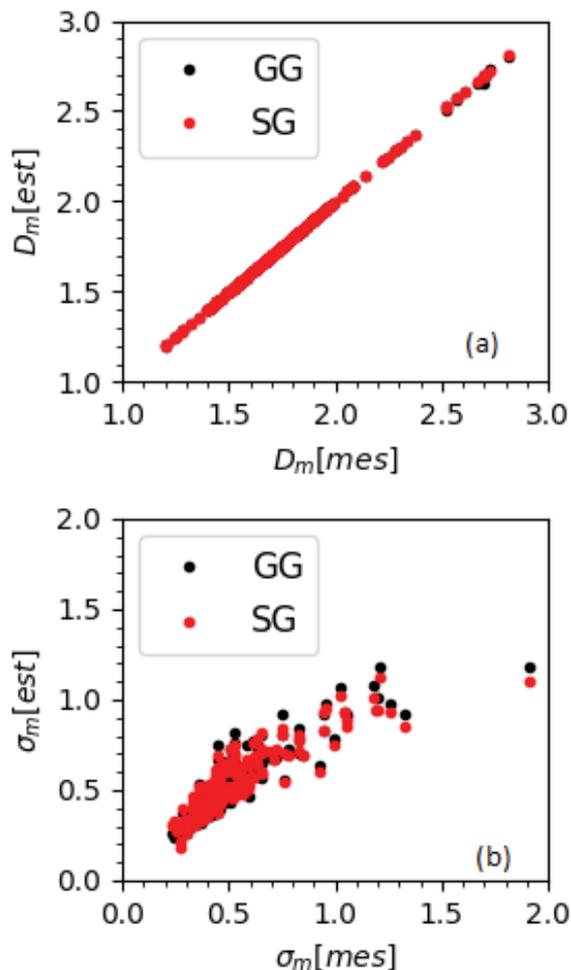


Figure 3: Nuage de points montrant la comparaison de D_m (a) et σ_m (b) estimées par les lois GG (en noir) et SG (en rouge) aux données mesurées.

Tableau 3. Capacité de SG et GG à ajuster les DSD

Ordre des moments	NS(GG)	NS(SG)	SDFE(GG)	SDFE(SG)
0	0,997	0,994	0,057	0,084
1	0,998	0,996	0,040	0,053
2	0,999	0,999	0,019	0,023
3	0,999	0,999	0,003	0,002
4	0,999	0,999	0,004	0,003
5	0,998	0,998	0,038	0,040
6	0,991	0,987	0,118	0,131

Nous avons aussi estimé le diamètre massique (D_m) et sa variation (σ_m) selon Ulbrich (1983) que nous avons comparé aux données réelles. Les résultats sont présentés sur la figure 3. Les points sont bien alignés suivant la première bissectrice (fig 3a) aussi bien pour la loi GG que pour la loi SG. Les deux lois estiment bien le diamètre massique avec le coefficient de Nash très élevé (NS=0,999) et une erreur très faible (SDFE=0,001). Par contre, l'estimation de la variation du diamètre massique (σ_m) se fait avec moins d'erreur avec la loi GG (SDFE=0,14) qu'avec la loi SG (SDFE=0,17). Ces résultats viennent conforter l'efficacité de la loi gamma généralisée (GG) normalisée par deux moments par rapport à la loi gamma standard (SG) normalisée par un moment tel que proposé par Testud et al., 2001.

IV. CONCLUSION

En Afrique de l'ouest les DSD ont été jusqu'à présent modélisées soit par la loi gamma standard normalisée par un ou deux moment(s) soit par la loi log-normale. Particulièrement au Nord du Bénin, il a été montré dans les études précédentes que la loi gamma standard normalisée par un double moment ajuste mieux les DSD que la log-normale. Dans cette étude, il a été mis en évidence la capacité de la loi gamma généralisée normalisée par deux moments, proposée par Lee et al., 2004, à mieux modéliser les DSD au Nord du Bénin. Il ressort de cette étude que GG modélise bien les DSD quels que soient leur type (convective ou stratiforme) et leur structuration que la loi SG proposée dans les études précédentes.

REFERENCES

Ajayi, G. O., and Olsen, R. L., 1985, *Modeling of a tropical raindrop size distribution for microwave and millimeter wave applications*, *Radio Sci.*, 20(2), 193-202,

Angulo-Martínez, M.; Beguería, S.; Kyselý, J., 2016. "Use of disdrometer data to evaluate the relationship of rainfall kinetic energy and intensity (KE-I)", *Sci. Total Environ.*, 568, 83-94.

Depraetere, C., Gosset, M., Ploix, S., Laurent, H., 2008. *The organization and kinematics of tropical rainfall systems ground tracked at mesoscale with gages: First results from the campaigns 1999-2006 on the Upper Oueme Valley (Benin)*. ' *J. Hydrol.* 375, 143-160

Feingold, G., and Z. Levin, 1986, *The Lognormal Fit to Raindrop Spectra from Frontal Convective Clouds in Israel*. *J. Climate Appl. Meteor.*, 25, 1346-1363, .

Lee, G. W., Zawadzki, I., Szymer, W., Sempere-Torres, D., Uijlenhoet, R., 2004, *A general approach to double-moment normalization of drop size distribution*, *J. Appl. Meteor.*, 43, 264-281.

- Markowitz, A., 1976, *Raindrop Size Distribution Expressions*. Journal of Applied Meteorology (1962-1982), 15(9), pp. 1029-1031
- Marshall, J.S., and Palmer, W.M.K., 1948, *The Distribution of Raindrops with Size*. Journal of Meteorology, 5, 165-166.
- Maur, A. N. A., 2001, *Statistical Tools for Drop Size Distributions: Moments and Generalized Gamma*. J. Atmos. Sci., 58, 407-418,
- Moumouni, S., Gosset, M., Houngninou, E., 2008, *Main features of rain drop size distributions observed in Benin, West Africa, with optical disdrometers*, Geophys. Res. Lett., 35, L23807.
- Nanko, K., Moskalski, S. M., Torres, R., 2016. *Rainfall erosivity-intensity relationships for normal rainfall events and a tropical cyclone on the US southeast coast*, Journal of Hydrology, 534, 440-450.
- Nzeukou, A., Sauvageot, H., Ochou, A., Kebe, C., 2004, *Raindrop Size Distribution and Radar Parameters at Cape Verde*. Journal of Applied Meteorology (1988-2005), 43(1), 90-105
- Ochou, A. D., Nzeukou, A., Sauvageot, H., 2007, *Parameterization of drop size distribution with rain rate*, Atmos. Res., 84, 58 – 66
- Omosho, J.B. 1985, *The separate contributions of squall lines, thunderstorms and the monsoon to the total rainfall in Nigeria*. Journal of Climatology 5, 543-552
- Raupach, T. H., and Berne, A., 2017, *Invariance of the Double-Moment Normalized Raindrop Size Distribution through 3D Spatial Displacement in Stratiform Rain*. J. Appl. Meteor. Climatol., 56, 1663-1680.
- Redelsperger, J., Thorncroft, C. D., Diedhiou, C. D., Lebel, T., Parker, D. J., and Polcher, J., 2006, *African Monsoon Multidisciplinary Analysis: An International Research Project and Field Campaign*. Bull. Amer. Meteor. Soc., 87, 1739-1746.
- Rosenfeld, D., and Ulbrich, C. W., 2003, *Cloud Microphysical Properties, Processes, and Rainfall Estimation Opportunities*. Meteor. Monogr., 52, 237-258.
- Rosewell, C. J., 1986, *Rainfall kinetic energy in eastern Australia*, J. Climate Appl. Meteor. 25(11): 1695-1701.
- Sauvageot, H., and J. Lacaux, 1995, *The Shape of Averaged Drop Size Distributions*, J. Atmos. Sci., 52, 1070 -1083.
- Sekhon, R. S., and Srivastava, R. C., 1971, *Doppler Radar Observations of Drop-Size Distributions in a Thunderstorm*, J. Atmos. Sci., 28, 983-994.
- Sempere-Torres, D., Porrà, J. M., and Creutin, J.D., 1994, *A general formulation for raindrop size distribution*, J. Appl. Meteor., 33, 1494-1502.
- Sempere-Torres, D., Sánchez-Diezma, R., Zawadzki, I., and Creutin, J-D. 1999 , *DSD identification following a pre-classification of rainfall type from radar analysis*, Preprints, 29th conf on Radar Meteorology, Montreal, QC, Canada, Amer. Meteor. Soc., 632-635.
- Sempere-Torres, D., Sánchez-Diezma, R., Zawadzki, I., and Creutin, J-D., 2000, *Identification of stratiform and convective areas using radar data with application to the improvement of DSD analysis and Z-R relations*, Phys. Chem. Earth, 25, 985-990.
- Testud, J., Oury, s., Black, R. A., Amayenc, P., Dou, X., 2001, *The Concept of "Normalized" Distribution to Describe Raindrop Spectra: A Tool for Cloud Physics and Cloud Remote Sensing*, J. Appl. Meteor., 40, 1118-1140.
- Thurai, M., and Bringi, V. N., 2018, *Application of the Generalized Gamma Model to Represent the Full Rain Drop Size Distribution Spectra*. J. Appl. Meteor. Climatol., 57.
- Uijlenhoet, R., and Stricker, J. N. M., 1999, *A consistent rainfall parameterization based on the exponential raindrop size distribution*. Journal of Hydrology, 218, 101-127.
- Ulbrich, C. W., 1983, *Natural variations in the analytical form of the raindrop size distribution*. J. Climate Appl. Meteor., 22, 1764-1775.
- Waldvogel, A., 1974, *The N_0 Jump in Raindrop Spectra*, Journal of the Atmospheric Sciences, 31, 1067-1078.